

УДК 519.672,534.14,62.53

А.Ю. Швець, А.М. Макасеєв

*Національний технічний університет України "КПІ", Київ
e-mail: alex.shvets@bigmir.net, makaseyev@ukr.net
website: <http://chaos.kpi.ua>*

Атлас карт динамических режимов неидеальной системы "маятник — электродвигатель"

The atlas of maps of dynamic regimes of system "pendulum–electric motor" is constructed. It is established that the deterministic chaos is a typical steady-state regime of the given system. Its class of universality of Feigenbaum is defined. The analytical approximation of map of Poincare in a chaotic regime is discovered.

Введение. Различные маятниковые системы постоянно привлекают к себе внимание исследователей в разных областях знаний. Это связано с простотой физических моделей маятниковых систем, что делает сравнительно легкой экспериментальную проверку получаемых теоретических результатов. Однако еще в большей степени маятниковые системы привлекательны тем, что их математические модели часто используются при моделировании систем совершенно иной природы. Маятниковые модели широко используются при исследовании колебаний свободной поверхности жидкости, колебаний оболочек, изучении работы сердечно-сосудистой системы живого организма, при изучении колебаний финансовых рынков и т.п.

Проблемы глобального энергосбережения требуют максимальной минимизации мощности тех или иных источников возбуждения колебательных систем. В связи с этим в большинстве практических задач, объект "колебательная система – источник возбуждения

колебаний" принципиально должен трактоваться как неидеальная динамическая система. В таких системах мощность источника возбуждения колебаний всегда предполагается сравнимой с мощностью потребляемой колебательной системой. Это приводит к необходимости обязательного учета обратного влияния колебательной системы на функционирование источника возбуждения колебаний.

В работе рассмотрены колебания плоского маятника, точка подвеса которого возбуждается электродвигателем ограниченной мощности. Возможность возникновения детерминированного хаоса в такой системе вследствие нелинейного взаимодействия между маятником и источником возбуждения его колебаний была установлена в работах [3] – [5]. Однако многие аспекты хаотической динамики системы "маятник–электродвигатель" остаются невыясненными.

Математическая модель системы. Как установлено в [3] – [5], уравнения движения системы "маятник–электродвигатель" могут быть описаны при помощи следующей детерминированной неидеальной динамической системы:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{d\tau} &= Cy_1 - y_2y_3 - \frac{1}{8}(y_1^2y_2 + y_2^3); \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= Cy_2 + y_1y_3 + \frac{1}{8}(y_1^3 + y_1y_2^2); \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= Dy_2 + Ey_3 + F;\end{aligned}\tag{1}$$

где фазовые переменные y_1, y_2 описывают отклонение маятника от вертикали, а фазовая переменная y_3 пропорциональна скорости вращения вала электродвигателя. Параметры системы определяются по формулам:

$$C = -\delta\varepsilon^{-2/3}\omega_0^{-1}, \quad D = -\frac{2ml^2}{I}, \quad F = 2\varepsilon^{-2/3}\left(\frac{N_0}{\omega_0} + E\right),\tag{2}$$

где m – масса маятника, l – приведенная длина маятника, ω_0 – собственная частота маятника, a – длина кривошипа электродвигателя, $\varepsilon = \frac{a}{l}$, δ – коэффициент демпфирования среды,

I — момент инерции ротора электродвигателя, E , N_0 — постоянные статической характеристики электродвигателя.

Целью настоящей работы является продолжение и углубление исследований, начатых в [5]. Так как система уравнений (1) является нелинейной, то выявление ее аттракторов и их изучение может быть проведено только при помощи ряда численных методов и алгоритмов. Методика проведения таких исследований предложена и описана в [5, 6].

Карты динамических режимов. Очень полное и наглядное представление о поведении динамической системы дает карта динамических режимов — диаграмма на плоскости, где по осям координат отложены параметры системы и обозначены области динамических режимов различных типов. Поскольку в исследуемой системе (1) число параметров больше двух, то подробная карта динамических режимов будет состоять из многих листов, которые, в совокупности, образуют атлас карт динамических режимов.

Методика построения карт динамических режимов состоит в следующем. Плоскость каких-либо выбранных параметров системы разбивается при помощи равномерной вертикально-горизонтальной сетки на точки, близко стоящие одна к другой. В каждой сеточной точке численно решается система уравнений (1) и определяется спектр ляпуновских характеристических показателей (ЛХП). Если старший ляпуновский показатель положителен, то установившийся режим системы является хаотическим, если же он отрицательный, то установившийся режим системы является положением равновесия. Если же старший ляпуновский характеристический показатель равен нулю, то установившийся режим системы может быть либо периодическим, либо квазипериодическим. В этом случае для уточнения типа установившегося режима анализируется второй показатель спектра ЛХП. Если второй показатель отрицательный, то установившийся режим является периодическим, а если этот показатель нулевой, то установившийся режим — квазипериодический. Особенно тщательно анализируются ситуации, в которых абсолютная величина ляпуновского характеристического показателя сравнима с погрешностью применяемого метода численного расчета. Такие ситуации соответствуют случаю, когда мы находимся достаточно близко к границам областей динамических режимов разных типов. В таких случаях для точной идентификации типа установившегося режима дополнительно проводится изучение

фазовых портретов, Фурье-спектров, сечений и отображений Пуанкаре. После установления типа динамического режима в какой-либо сеточной точке пикселю экрана компьютера, соответствующему данной точке плоскости выбранных параметров, присваивается определенный цветовой код. В результате на экране компьютера получается некоторая карта, дающая наглядное представление о расположении динамических режимов разных типов на плоскости параметров системы (1).

На рис. 1 приведены построенные при помощи вышеизложенной процедуры листы карт динамических режимов системы (1). При построении карт динамических режимов два из четырех параметров системы (C, D, E, F) полагались постоянными, два других изменялись в некоторых пределах. Карта, приведенная на рис. 1а, построена при $C = -0.1, E = -0.59$. Карта, приведенная на рис. 1б, построена при $F = -0.17, E = -0.59$. В свою очередь карты, приведенные на рис. 1в–г, построены при $F = 0.19, D = -0.6$ и при $D = -0.5, E = -0.59$ соответственно. На всех приведенных картах темно-серые области соответствуют положениям равновесия системы (1), светло серые — предельным циклам, а черные — хаотическим аттракторам.

Как видно из построенных карт, хаотические аттракторы (черные области на картах) занимают немалые, по площади, области на картах динамических режимов. Поэтому можно утверждать, то детерминированный хаос является типичным установившимся состоянием системы (1). Особо следует подчеркнуть, что рассмотрение задачи в идеальной постановке, то есть при пренебрежении влиянием маятника на функционирование электродвигателя, может привести к грубым ошибкам в описании динамики системы. Действительно, в идеальной постановке задачи, в системе уравнений (1) следует положить $D = 0$, после чего система уравнений распадется на две подсистемы. Первая из них будет состоять из первых двух уравнений системы (1), а вторая — состоять из одного третьего уравнения системы (1). В этом случае третье уравнение будет линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Его общее решение может быть найдено по известной формуле, причем данное решение не зависит от маятниковых переменных y_1, y_2 . После этого, подставив найденное решение y_3 в первую подсистему сможем искать y_1, y_2 как решения нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка.

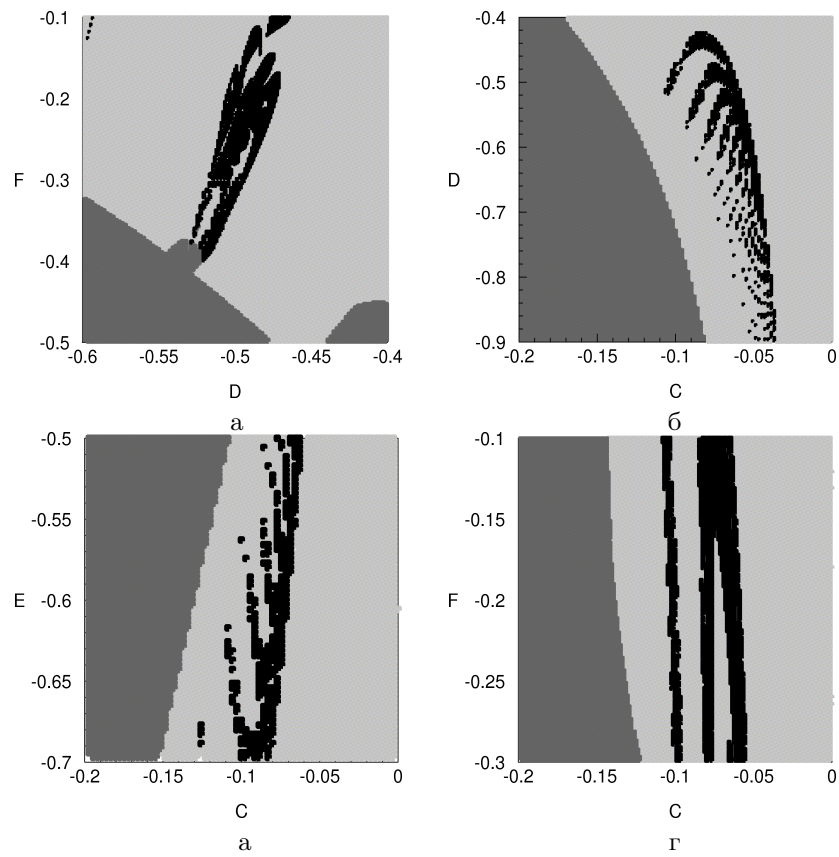


Рис. 1. Листы атласа карт динамических режимов.

Следовательно, в идеальной постановке задачи, максимальная размерность фазового пространства полученных уравнений будет равна двум. В пространствах такой размерности существование хаотических аттракторов теоретически невозможно [1, 2, 5]. В то же время, как следует из построенных карт динамических режимов, хаотические аттракторы являются типичными установившимися режимами рассматриваемой системы. Таким образом, при решении задачи в идеальной постановке может быть полностью утрачена информация о детерминированном хаосе системы.

Подчеркнем, что построенные двухпараметрические карты динамических режимов фактически являются мультипараметрическими. Действительно, как следует из (2), параметры C, D и F системы (1) зависят от ряда характеристик маятника и электродвигателя. То есть, фактически, данные параметры являются мультипараметрами.

Построенные карты динамических режимов позволяют проводить быструю качественную идентификацию типа установившегося режима системы (1). На основании построенных карт можно проводить более детальные исследования возникающих динамических режимов, в частности, изучать переходы от регулярных режимов к хаотическим. С этой целью необходимо выполнить вертикальное (горизонтальное) сечение карты и построить иные характеристики системы, соответствующие изменению какого-либо из параметров в интервале, соответствующем выполненному сечению карты. Например, выполним вертикальное сечение представленной на рис. 1б карты, по прямой $C = -0.07$. На рис. 2 представлен фрагмент фазопараметрической характеристики ("бифуркационного дерева") системы, соответствующий изменению параметра D в интервале от -0.55 до -0.4 . Густо черные области данного "бифуркационного дерева" соответствуют хаотическим аттракторам. Участки "кроны бифуркационного дерева", состоящие из отдельных ветвей соответствуют предельным циклам системы. Как установлено в [5], такой вид "бифуркационного дерева" соответствует переходам "цикл — хаос" по сценарию Фейгенбаума с правой стороны интервалов существования хаотических аттракторов и через перемежаемость по Помо–Манневиллю — с левой стороны интервалов существования хаотических аттракторов.

Определение класса универсальности. Как в ранее проведенных исследованиях системы "маятник–электродвигатель" ([3] – [5]), так и

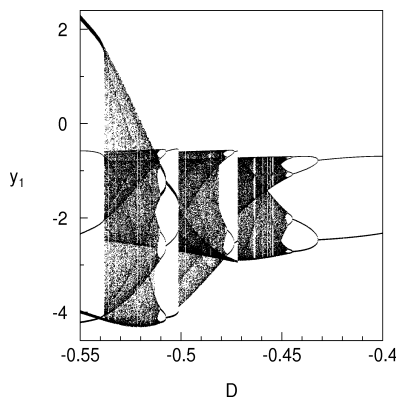


Рис. 2. Фазопараметрическая характеристика системы.

в предыдущем параграфе была установлена возможность переходов к хаосу в данной системе по сценарию Фейгенбаума, то есть через каскад бифуркаций удвоения периодов предельных циклов. Поэтому особый интерес вызывает определение класса универсальности по Фейгенбауму такой динамической системы. С этой целью необходимо определить константу Фейгенбаума системы (1).

Рассмотрим поведение системы при значениях параметров $C = -0.1$, $D = -0.1$, $E = -0.59$, а $0.17 \leq F \leq 0.27$. На рис. 3а приведена зависимость старшего, отличного от нуля, ляпуновского характеристического показателя системы (1) от параметра F . Как видно из рис. 3а, существуют несколько интервалов изменения параметра F , в которых система (1) имеет положительный ляпуновский показатель. В этих интервалах аттрактором системы будет хаотический аттрактор. В области существования хаотических аттракторов в левой части 3а можно заметить ряд провалов графика ляпуновского показателя в область отрицательных значений. Малые интервалы изменения значений параметра F , в которых наблюдаются такие провалы, образуют так называемые окна периодичности в хаосе. В этих окнах аттракторами системы будут предельные циклы. Внимательное изучение рис. 3а позволяет также заметить в правой части рисунка ряд подходов графика ляпуновского показателя к нулевой линии. Эти подходы соответствуют точкам бифуркаций удвоения периода циклов системы.

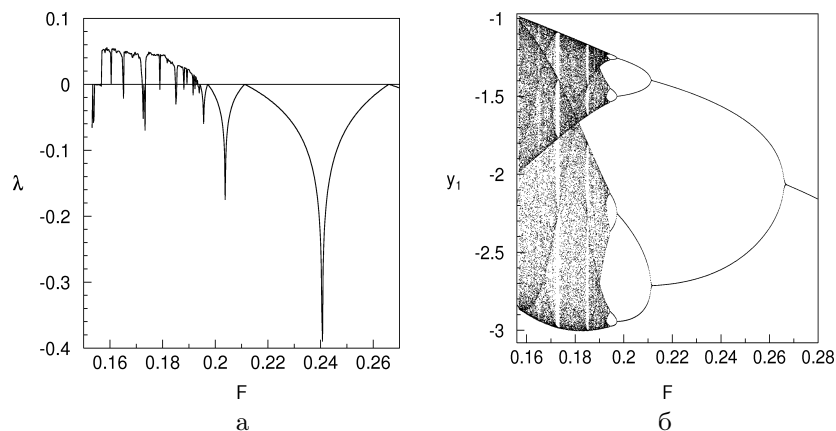


Рис. 3. Зависимость старшего, отличного от нуля, липуновского характеристического показателя от F (а), фазопараметрическая характеристика системы (б).

На рис. 3б приведена фазопараметрическая характеристика системы, построенная при тех же пределах изменения параметра F с секущей плоскостью $y_3 = -1$. Здесь также можно идентифицировать области изменения F , в которых у системы (1) существуют хаотические аттракторы. Это густо-черные области в левой части рис. 3б. Расположенные по вертикали "белые пятна", в области хаоса соответствуют окнам периодичности. В правой части рис. 3б можно наблюдать четкие расщепления ветвей "бифуркационного дерева", абсциссы которых соответствуют точкам бифуркаций удвоения периода предельных циклов. Причем при прохождении очередной точки бифуркации удваиваются не только период, но и так называемая тактность предельного цикла. Таким образом, переход к хаосу при уменьшении параметра F происходит по сценарию Фейгенбаума.

Для определения класса универсальности системы (1) необходимо найти константу Фейгенбаума, которая вычисляется по формуле

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n - F_{n-1}}{F_{n+1} - F_n}, \quad (3)$$

где F_n — значение бифуркационного параметра в точке n -ой бифуркации удвоения периода.

Бифуркационные значения F_n соответствуют точкам подхода графика ляпуновского показателя к нулевой линии на рис. 3а или точкам расщепления отдельных ветвей "бифуркационного дерева" на рис. 3б. Заметим, что для правильного вычисления константы Фейгенбаума необходимо определять бифуркационные значения F_n с достаточно большой точностью. Поэтому при помощи рис. 3 первоначально грубо определяем интервал изменения F , в котором находится первая точка бифуркации F_1 . Как следует из рис. 3, $0.26 < F_1 < 0.27$. Далее строим зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра F и фазопараметрическую характеристику системы на интервале $(0.26, 0.27)$, затем уточняем значение первой точки бифуркации. Повторяя несколько раз процедуру уменьшения интервала изменения параметра F и строя на уменьшенном интервале зависимость старшего ляпуновского показателя от параметра и фазопараметрическую характеристику системы, мы сможем определить значение F_1 с достаточно высокой точностью. Чтобы убедиться в правильности определения точки бифуркации, строим фазовые портреты системы при прохождении первой точки бифуркации удвоения периода и убеждаемся в изменении структуры соответствующих фазовых портретов с 1-тактного цикла на 2-тактный цикл. Аналогичные процедуры применяются и для нахождения последующих точек бифуркаций удвоения периода.

В нашем случае значения точек бифуркации определялись с точностью до $\varepsilon < 10^{-7}$. Так, при $F = 0.265967$ в системе (1) существует 1-тактный предельный цикл, а при $F = 0.265966$ такой цикл теряет устойчивость и в системе возникает 2-тактный цикл. За точку первой бифуркации удвоения периода принимаем среднее арифметическое этих двух значений F , то есть полагаем, что $F_1 = 0.2659665$. При $F = 0.211192$ в системе еще существует 2-тактный цикл, а при $F_2 = 0.2111915$ происходит вторая бифуркация удвоения периода, в результате которой возникает 4-тактный цикл, который теряет устойчивость при $F_3 = 0.1971565$, и в системе возникает 8-тактный цикл. Четвертая и пятая бифуркация удвоения периода происходят соответственно при $F_4 = 0.1942145$ и $F_5 = 0.1935835$, в результате чего возникают 16- и 32-тактные циклы. При $F_6 = 0.1934483$ 32-тактный цикл теряет устойчивость, и в системе возникает 64-тактный цикл. Этот бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода приводит к возникновению в системе

хаотического аттрактора при $F = 0.193410$. Подставляя найденные значения F_i в формулу (3) последовательно получаем:

$$\delta_2 = 3.90274, \delta_3 = 4.77056, \delta_4 = 4.66244, \delta_5 = 4.66720.$$

Значение $\delta_5 = 4.66720$ принимаем за приближенное значение константы Фейгенбаума. Вычисленное значение константы Фейгенбаума для системы "маятник-электродвигатель" достаточно близко к соответствующей константе для логистического отображения:

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2,$$

. Напомним, что константа Фейгенбаума для логистического отображения равна $\delta \approx 4.6692$. На основании проведенных расчетов можем утверждать, что система "маятник-электродвигатель" относится к тому же классу универсальности по Фейгенбауму, что и логистическое отображение. Следовательно, переход к хаосу в системе "маятник-электродвигатель" через каскад бифуркаций удвоения периода будет происходить не только качественно, но и количественно — аналогично подобному переходу к хаосу в логистическом отображении. Этот факт свидетельствует об универсальности динамических процессов, которые имеют место в абсолютно разных динамических системах.

Покажем, что значение константы Фейгенбаума остается практически неизменным и при другом наборе параметров системы (1). Пусть параметры системы соответственно равны $C = -0.1$, $D = -0.5$, $F = 0.14$. В качестве бифуркационного выберем теперь параметр E . Исследуем поведение системы при изменении E в пределах $-0.77 \leq E \leq -0.6$. На рис. 4а построена зависимость старшего отличного от нуля ляпуновского характеристического показателя от параметра E . Соответственно, на рис. 4б построена фазопараметрическая характеристика системы.

Следует отметить качественное подобие между рис. 4а-б и соответствующими рис. 3а-б. Как и в предыдущем случае, существует несколько интервалов изменения параметра (в данном случае E), в которых у системы старший ляпуновский показатель будет положительным (рис. 4а). Следовательно, в отмеченных выше интервалах в системе существуют хаотические аттракторы. Снова на рис. 4а четко прослеживаются подходы графика зависимости ляпуновского показателя к нулевой линии. В свою очередь,

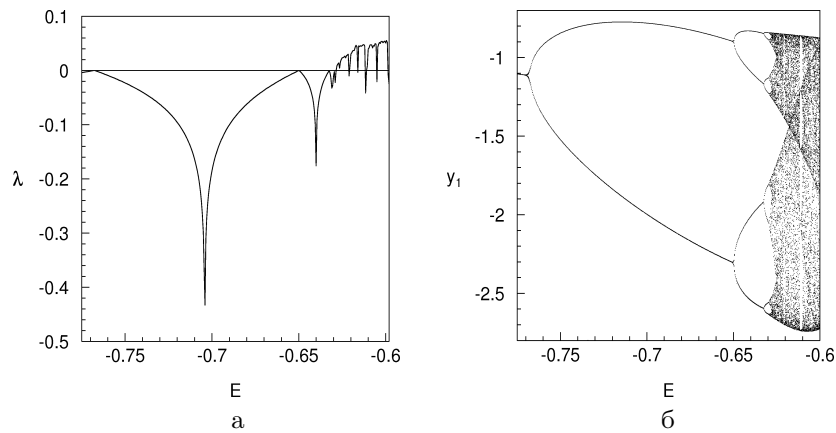


Рис. 4. Зависимость старшего, отличного от нуля, ляпуновского характеристического показателя от E (а), фазопараметрическая характеристика системы (б).

"бифуркационное дерево" системы (рис. 4б) наглядно демонстрирует переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума при изменении параметра E . Заметим, однако, что, в отличие от предыдущего случая, теперь бесконечный каскад бифуркаций удвоения будет происходить при возрастании бифуркационного параметра.

Найдем значения параметра E , при которых происходят бифуркации удвоения периода. Методика нахождения таких значений аналогична примененной в предыдущем случае для нахождения бифуркационных значений F . При $E = -0.76763$ в системе существует 1-тактный предельный цикл, который при $E_1 = -0.767625$ теряет устойчивость, и в системе возникает 2-тактный цикл. При $E = -0.64983$ в системе еще существует 2-тактный цикл, а при $E_2 = -0.649825$ происходит вторая бифуркация удвоения периода, в результате которой возникает 4-тактный цикл. Такой цикл теряет устойчивость при $E_3 = -0.632405$ и в системе возникает 8-тактный цикл. Четвертая и пятая бифуркация удвоения периода происходят соответственно при $E_4 = -0.629315$ и $E_5 = -0.628666$, в результате чего возникают 16- и 32-тактные циклы. При $E = -0.628527$ 32-тактный цикл теряет устойчивость и в системе возникает 64-тактный цикл. Этот бесконечный каскад

бифуркаций удвоения периода приводит к возникновению в системе хаотического аттрактора при $E = -0.62848$. Применяя формулу (3), соответственно подставляя в нее значения E_i вместо F_i , последовательно получаем:

$$\delta_2 = 6.76234, \quad \delta_3 = 5.63754, \quad \delta_4 = 4.76117, \quad \delta_5 = 4.66906.$$

Величину $\delta_5 = 4.66906$ принимаем за приближенное значение константы Фейгенбаума.

Полученное при изучении бифуркаций по параметру E значение константы Фейгенбаума системы "маятник-электродвигатель" опять-таки очень близко к значению соответствующей константы логистического отображения. Этот факт является еще одним доказательством того, что система "маятник-электродвигатель" и логистическое отображение принадлежат к одному классу универсальности по Фейгенбауму.

Аналитическая аппроксимация отображения Пуанкаре.

В ранее проведенных исследованиях системы "маятник-электродвигатель" ([3] – [5]) было установлено, что хаотические аттракторы, существующие в этой системе, как правило, имеют "квазиленточные" отображения Пуанкаре. Такой вид отображений Пуанкаре дает возможность приближенно исследовать хаотическую динамику системы при помощи одномерного дискретного отображения [1, 2, 7], что существенно упрощает такие исследования по сравнению с изучением динамики при помощи нелинейной системы дифференциальных уравнений третьего порядка. Еще одним аргументом в пользу попыток исследования динамики системы при помощи дискретных отображений является только что установленная принадлежность системы "маятник-электродвигатель" к тому же классу универсальности, что и одномерное логистическое отображение.

Пусть параметры системы (1) соответственно равны: $C = -0.1$, $D = -0.1$, $E = -0.59$, $F = 0.19$. При таких значениях параметров в системе существует аттрактор, который имеет положительный старший ляпуновский показатель, то есть является хаотическим. Отображения Пуанкаре такого хаотического аттрактора построены на рис. 5.

Как видно из данного рисунка, отображения Пуанкаре по обоим фазовым переменным имеют структуру, близкую к линиям

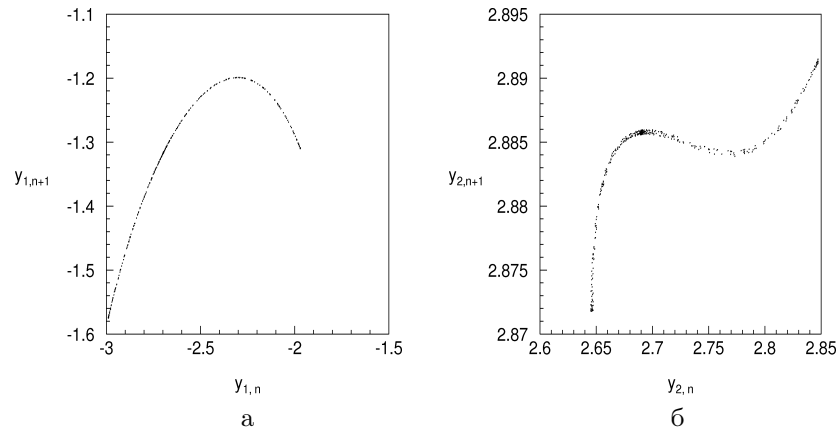


Рис. 5. Отображения Пуанкаре хаотического аттрактора при $C = -0.1$, $D = -0.1$, $E = -0.59$, $F = 0.19$.

на плоскости. Оба отображения представляют собой некоторые хаотические множества точек, число которых возрастает с увеличением времени численного интегрирования. Предусмотреть порядок размещения точек вдоль "лент", которые образуют отображение, невозможно. Однако заранее известно, что размещаться они могут только вдоль этих "лент" [5]. Это означает, что исходная система дифференциальных уравнений может быть приближенно сведена к одному из дискретных отображений вида $y_{k,n+1} = f(y_{k,n})$, $k \in \{1, 2\}$, исследование динамики которого, будет проще, чем исследование динамики исходной системы. Кроме того, само отображение Пуанкаре, по одной из фазовых координат, имеет вид квадратичного одномерного отображения с локальным максимумом. Данный вид отображения Пуанкаре является еще одним подтверждением того, что система (1) имеет установившийся хаотический режим колебаний [1, 2].

Рассмотрим отображение Пуанкаре, представленное на рис. 5а. График этого отображения задается набором дискретных значений координат

$$(y_{1,n+1}, y_{1,n}), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

где N — число дискретных точек, по которым построено отображение Пуанкаре. Поставим задачу о построении такого полинома, график

которого как можно лучше приближается к точкам отображения Пуанкаре. Применим для той цели метод наименьших квадратов [8]. Для набора точек (4) найдем полином степени m :

$$f^{(m)}(y_1) = p_1 y_1^m + p_2 y_1^{m-1} + \dots + p_m y_1 + p_{m+1}, \quad (5)$$

коэффициенты которого являются решением следующей задачи минимизации

$$\min_{p_1, p_2, \dots, p_{m+1}} \sum_{i=1}^N \left(f^{(m)}(y_{1,i}) - y_{1,i+1} \right)^2.$$

Погрешность аппроксимации $\varepsilon^{(m)}$ будем оценивать при помощи ошибки в среднеквадратичной норме, т.е.

$$\varepsilon^{(m)} = \sqrt{\min_{p_1, p_2, \dots, p_{m+1}} \sum_{i=1}^N \left(f^{(m)}(y_{1,i}) - y_{1,i+1} \right)^2}.$$

Применяя данный метод последовательно получили следующие полиномы:

при $m = 2$

$$f^{(2)}(y_1) = -0.8377y_1^2 - 3.8947y_1 - 5.7267,$$

погрешность аппроксимации $\varepsilon^{(2)} = 0.0506$;

при $m = 3$

$$f^{(3)}(y_1) = -0.0067y_1^3 - 0.8881y_1^2 - 4.0199y_1 - 5.8292,$$

погрешность аппроксимации $\varepsilon^{(3)} = 0.0505$;

при $m = 4$

$$f^{(4)}(y_1) = -0.5365y_1^4 - 5.3596y_1^3 - 20.778y_1^2 - 36.6289y_1 - 25.7282,$$

погрешность аппроксимации $\varepsilon^{(4)} = 0.0096$;

Далее приведены только значения погрешностей аппроксимации, которые при возрастании степени полинома m соответственно равны:

$$\varepsilon^{(5)} = 0.0087, \quad \varepsilon^{(6)} = 0.0082, \quad \varepsilon^{(7)} = 0.0081, \quad \varepsilon^{(8)} = 0.0081.$$

Видно, что при увеличении степени полинома, начиная со степени $m = 4$ точность аппроксимации увеличивается совсем незначительно. На рис. 6 представлен увеличенный фрагмент наложения графика построенного полинома $f^{(2)}(y_1)$ (непрерывная линия на рисунке) на график отображения Пуанкаре по фазовой переменной y_1 . Как видно из рисунка, эти графики достаточно близки один

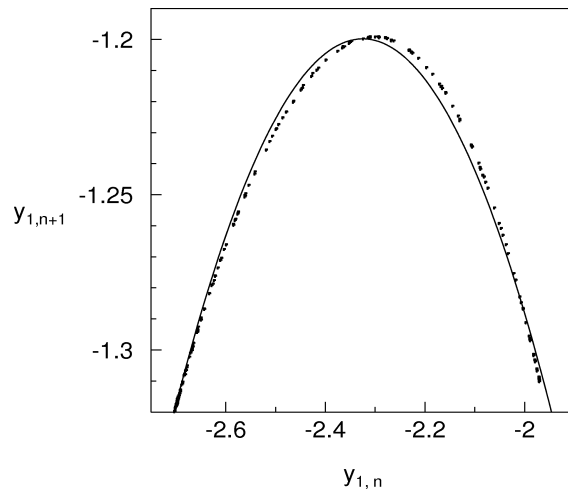


Рис. 6. Отображение Пуанкаре и его аппроксимация квадратичной функцией.

к другому. Таким образом, в данном случае исследование хаотической динамики трехмерной системы дифференциальных уравнений (1) приближенно можно заменить исследованием одномерного дискретного отображения $y_{1,n+1} = f^{(2)}(y_{1,n})$. Более точные результаты мы получим при использовании дискретного отображения типа $y_{1,n+1} = f^{(m)}(y_{1,n})$, $m = 4 \div 8$.

Заключение. Таким образом, в работе построен атлас карт динамических режимов неидеальной системы "маятник–электродвигатель". На основании построенных карт можно утверждать, что детерминированный хаос является типичным установившимся режимом данной системы. Установлено, что система "маятник–электродвигатель" относится к тому же классу универсальности по Фейгенбауму, что и логистическое отображение. Показано, что в некоторых случаях динамику системы можно приближенно аппроксимировать одномерным дискретным отображением. Получено аналитическое представление такого одномерного дискретного отображения.

Литература

- [1] *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990. — 312 с.
- [2] *Анищенко В. С., Астахов В. В., Вадивасова Т. Е. и др.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. — Москва; Ижевск: R&CD, 2003. — 530 с.
- [3] *Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.* Хаотические режимы взаимодействия в системе "маятник-источник энергии" // Прикл. мех. — 1990. — **26**, № 5. — С. 90–96.
- [4] *Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu.* Chaos in vibrating systems with limited power-supply // Chaos. — 1993. — **3**, № 3. — P.387–395.
- [5] *Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. — М.; Ижевск: R&CD, 2008. — 280 с.
- [6] *Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu.* Dynamical chaos for a limited power supply oscillations in cylindrical tanks // Journal of Sound and Vibration. — 2009. — **322**, № 3. — С. 532–553.
- [7] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. — М.: Наука, 2006. — 356 с.
- [8] *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. — М.: Физматлит, 1958. — 336 с.